Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

ANÁLISE MATEMÁTICA IV

FICHA 2 – ANÁLISE COMPLEXA

(1) Para cada um dos seguintes conjuntos $Z \subset \mathbb{C}$, esboce o conjunto

$$W = \{w \in \mathbb{C} : e^w \in Z\}$$

dos seus logaritmos.

(a) $Z = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) > 0,\ \mathrm{Im}(z) > 0\}$;
(b) $Z = \mathbb{R}$;
(c) $Z = \{z \in \mathbb{C} : |z| = e,\ \frac{\pi}{4} \leq \arg z \leq \frac{3\pi}{4}\}$.

Resolução: *Como, para $z \neq 0$, os logaritmos de z são dados por*

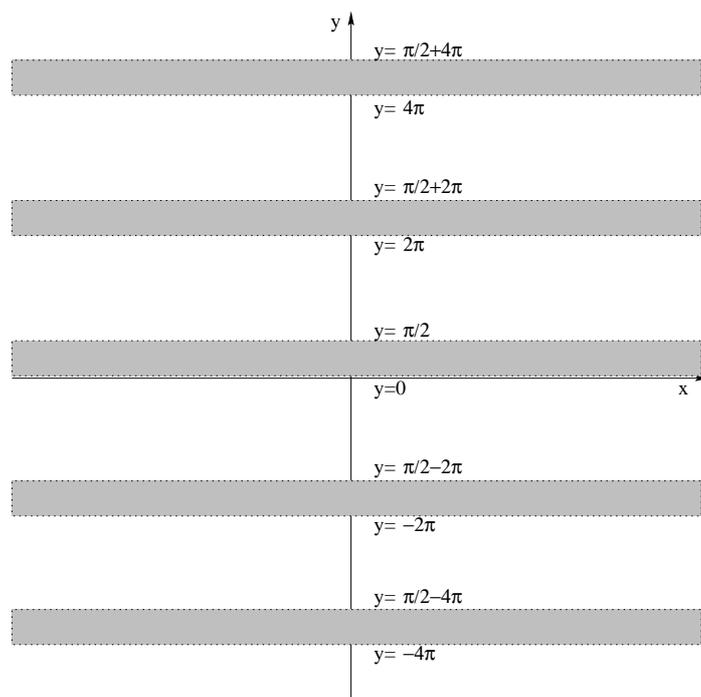
$$\mathrm{Log}\, z = \ln|z| + i(\arg z + 2k\pi)\ , \quad k \in \mathbb{Z}\ ,$$

os conjuntos W são da forma

$$W = \{\ln|z| + i(\arg z + 2k\pi) \mid k \in \mathbb{Z} \text{ e } z \in Z \setminus \{0\}\}\ .$$

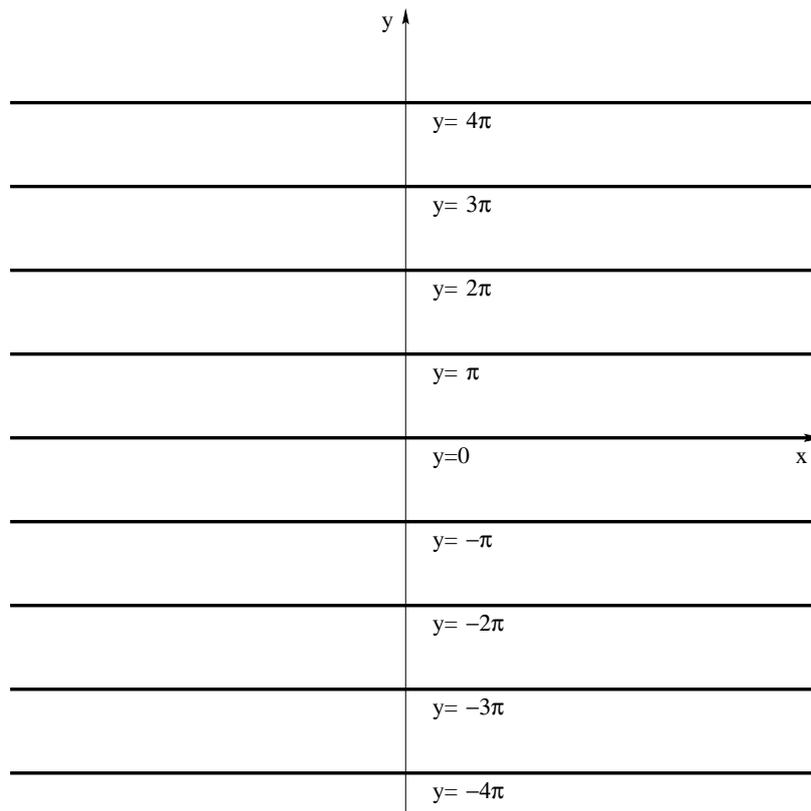
(a)

$$\begin{aligned} W &= \{\ln|z| + i(\arg z + 2k\pi) : k \in \mathbb{Z}\ ,\ \mathrm{Re}\, z > 0\ \mathrm{Im}\, z > 0\ \} \\ &= \{\ln|z| + i(\arg z + 2k\pi) : k \in \mathbb{Z}\ ,\ |z| > 0\ ,\ \arg z \in]0, \pi/2[\ \} \\ &= \{x + i\underbrace{(\theta + 2k\pi)}_{y} : k \in \mathbb{Z}\ ,\ x \in \mathbb{R}\ ,\ \theta \in]0, \pi/2[\ \}\ . \end{aligned}$$

Portanto o esboço do conjunto W é:

(b) *Tendo em conta que* 0 *não pertence à imagem da exponencial, temos*

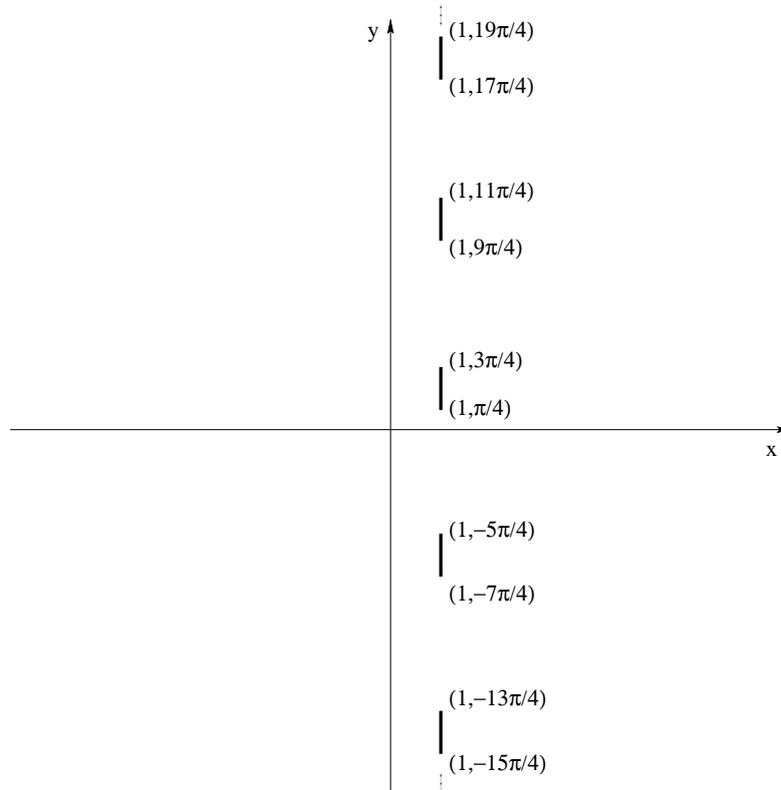
$$\begin{aligned} W &= \{\ln|z| + i(\arg z + 2k\pi) : k \in \mathbb{Z} \ , \ z \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \ \} \\ &= \{\ln|z| + i(\arg z + 2k\pi) : k \in \mathbb{Z} \ , \ |z| > 0 \ , \ \arg z = 0 \textit{ ou } \arg z = \pi \ \} \\ &= \{x + i \underbrace{(2k\pi)}_{y} : k \in \mathbb{Z} \ , \ x \in \mathbb{R} \ \} \ . \end{aligned}$$

Portanto o esboço do conjunto W *é:*

y
y= 4π
y= 3π
y= 2π
y= π
y=0
x
y= −π
y= −2π
y= −3π
y= −4π

(c)

$$\begin{aligned} W &= \{\ln|z| + i(\arg z + 2k\pi) : k \in \mathbb{Z} \ , \ |z| = e \ , \ \frac{\pi}{4} \leq \arg z \leq \frac{3\pi}{4} \ \} \\ &= \{\underbrace{1}_{x} + i \underbrace{(\theta + 2k\pi)}_{y} : k \in \mathbb{Z} \ , \ \frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{4} \ \} \ . \end{aligned}$$

Portanto o esboço do conjunto W *é:*

□

(2) Calcule pela definição

$$\int_\gamma \frac{z+2}{z}\,dz\ ,$$

onde γ é a semicircunferência ou circunferência parametrizada por:

(a) $z = 2e^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq \pi$;
(b) $z = 2e^{i\theta}$, $\pi \leq \theta \leq 2\pi$;
(c) $z = 2e^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

Resolução:

(a) *A parametrização* $z(\theta) = 2e^{i\theta}$ *tem derivada* $z'(\theta) = 2ie^{i\theta}$. *Portanto, pela definição de integral temos*

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \frac{z+2}{z}\,dz &= \int_\gamma \left(1+\frac{2}{z}\right) dz \\
&= \int_0^\pi \left(1+\frac{2}{2e^{i\theta}}\right) 2ie^{i\theta} d\theta \\
&= \int_0^\pi \left(2ie^{i\theta}+2i\right) d\theta \\
&= 2e^{i\theta}\Big|_0^\pi + 2\pi i \\
&= -2-2+2\pi i \\
&= -4+2\pi i
\end{aligned}$$

(b) *Analogamente*

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \frac{z+2}{z}\,dz &= \int_\gamma \left(1+\frac{2}{z}\right) dz \\
&= \int_\pi^{2\pi} \left(1+\frac{2}{2e^{i\theta}}\right) 2ie^{i\theta} d\theta \\
&= \int_\pi^{2\pi} \left(2ie^{i\theta}+2i\right) d\theta \\
&= 2e^{i\theta}\Big|_\pi^{2\pi} + 2\pi i \\
&= 2-(-2)+2\pi i \\
&= 4+2\pi i
\end{aligned}$$

(c) *Pela aditividade do integral em relação ao caminho de integração, o integral da alínea c) é igual à soma dos integrais das alíneas a) e b):*

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \frac{z+2}{z}\,dz &= (-4+2\pi i)+(4+2\pi i) \\
&= 4\pi i
\end{aligned}$$

□

(3) Seja γ a circunferência de raio 1 centrada na origem percorrida uma vez no sentido positivo. Usando o teorema de Cauchy e as fórmulas integrais de Cauchy, calcule os seguintes integrais:

(a)
$$\int_\gamma 1\ dz\ ;$$

(b)
$$\int_\gamma \frac{e^z}{z}\ dz\ ;$$

(c)
$$\int_\gamma \frac{\cos z}{(z-2i)^7}\ dz\ ;$$

(d)
$$\int_\gamma \frac{\sin z}{(2z-i)^6}\ dz\ .$$

Resolução:

(a) *A função constante $f(z)=1$ é analítica em $\mathbb{C}$, que é uma região simplesmente conexa. Portanto pelo teorema de Cauchy, o integral de $f(z)$ ao longo de qualquer caminho fechado em $\mathbb{C}$ é 0. Em particular*

$$\int_\gamma 1\ dz = 0$$

(b) *$f(z) = e^z$ é uma função analítica em $\mathbb{C}$ e γ é um caminho fechado simples contendo a origem e orientado no sentido positivo. Portanto pela fórmula de Cauchy,*

$$\begin{aligned}\int_\gamma \frac{e^z}{z}dz &= \int_\gamma \frac{f(z)}{z-0}dz \\ &= 2\pi i f(0) \\ &= 2\pi i\end{aligned}$$

(c) *A função*

$$f(z) = \frac{\cos z}{(z-2i)^7}$$

é uma função analítica em $\mathbb{C} \setminus \{2i\}$. Como $2i$ não pertence ao interior do contorno γ, a função é analítica numa região que contém o interior do contorno γ e portanto, pelo teorema de Cauchy,

$$\int_\gamma \frac{\cos z}{(z-2i)^7}dz = \int_\gamma f(z)dz = 0$$

(d) *Podemos escrever o integral na forma*

$$\int_\gamma \frac{\sin z}{(2z-i)^6}dz = \frac{1}{2^6}\int_\gamma \frac{\sin z}{(z-\frac{i}{2})^6}dz$$

Aplicando a fórmula integral de Cauchy para a derivada de ordem 5 de uma função analítica à função $f(z) = \sin z$ (que é analítica em $\mathbb{C}$ e portanto numa região que contem o interior do caminho γ) temos

$$\begin{aligned}\int_\gamma \frac{\sin z}{(2z-i)^6}dz &= \frac{1}{2^6}\frac{2\pi i}{5!}f^{(5)}(\frac{i}{2}) \\ &= \frac{\pi i}{2^5 120}\cos(\frac{i}{2}) \\ &= \frac{\pi i}{2^8 15}\frac{e^{-\frac{1}{2}}+e^{\frac{1}{2}}}{2} \\ &= \frac{(1+e)\pi i}{2^9 15\sqrt{e}}\end{aligned}$$

□

(4) Determine a série de Taylor em torno da origem de cada uma das seguintes funções, indicando o raio de convergência.

(a) $f(z) = \frac{1}{1-z}$;
(b) $f(z) = e^{z+2}$;
(c) $f(z) = \begin{cases} \cos z & \text{se } \operatorname{Re} z < 1 \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$

Resolução:

(a) *Para $|z| < 1$, a função f é a soma da série geométrica de razão z. Por unicidade do desenvolvimento em série de potências, concluímos que o desenvolvimento de Taylor é*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

válido para $|z| < 1$. O raio de convergência da série de Taylor é 1.

(b) *Temos*

$$e^{z+2} = e^2 e^z = e^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

sendo a última igualdade válida para todo o $z \in \mathbb{C}$. *Por unicidade concluímos que o desenvolvimento de Taylor em torno da origem é*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^2}{n!} z^n$$

sendo o raio de convergência $+\infty$.

(c) *O desenvolvimento de Taylor de uma função num ponto depende apenas dos valores que a função toma numa vizinhança desse ponto. Portanto o desenvolvimento de Taylor de* $f(z)$ *na origem é o mesmo que o de* $\cos z$. *Ora*

$$\begin{aligned} \cos z &= \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \\ &= \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz)^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-iz)^n}{n!} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} \end{aligned}$$

onde a última igualdade se deve ao cancelamento das potências ímpares de z. *Este desenvolvimento é válido para qualquer* $z \in \mathbb{C}$ *porque o desenvolvimento da exponencial é válido para todo o* $z \in \mathbb{C}$. *Assim, o desenvolvimento de Taylor de* $f(z)$ *em torno da origem é*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

e o raio de convergência desta série de potências é $+\infty$.

$\square$

Comentário: *Apesar de o desenvolvimento de Taylor da alínea c) convergir para todo o* $z \in \mathbb{C}$, *ele só representa a função* f *no disco aberto de raio 1 centrado na origem, que é o maior disco aberto centrado na origem em que* $f(z)$ *é analítica.* $\diamondsuit$

(5) Determine as séries de Laurent da função

$$f(z) = \frac{1}{z(1-z)}$$

válidas nas seguintes regiões:

(a) $0 < |z| < 1$;
(b) $|z| > 1$;
(c) $0 < |z-1| < 1$;
(d) $|z-1| > 1$.

Resolução:

(a) *Temos*

$$\begin{aligned}\frac{1}{z(1-z)} &= \frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-z}\\ &= \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty} z^n \text{ para } 0<|z|<1\\ &= \sum_{n=-1}^{\infty} z^n \text{ para } 0<|z|<1\end{aligned}$$

Por unicidade do desenvolvimento de Laurent, concluímos que o desenvolvimento de Laurent na região $0<|z|<1$ *é*

$$f(z)=\sum_{n=-1}^{\infty} z^n$$

(b) *Temos*

$$\begin{aligned}\frac{1}{z(1-z)} &= \frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-z}\\ &= \frac{1}{z}\cdot\frac{\frac{1}{z}}{\frac{1}{z}-1}\\ &= -\frac{1}{z^2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z}}\\ &= -\frac{1}{z^2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^k \text{ para } \left|\frac{1}{z}\right|<1\\ &= \sum_{k=2}^{\infty} -\frac{1}{z^k} \text{ para } |z|>1\end{aligned}$$

Por unicidade, concluímos que o desenvolvimento de Laurent na região $|z|>1$ *é*

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{-2} -z^n$$

(c)

$$\begin{aligned}\frac{1}{z(1-z)} &= -\frac{1}{z-1}\cdot\frac{1}{z}\\ &= -\frac{1}{z-1}\cdot\frac{1}{1+(z-1)}\\ &= -\frac{1}{z-1}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-1)^n \text{ para } 0<|z-1|<1\\ &= \sum_{n=-1}^{\infty}(-1)^n(z-1)^n \text{ para } 0<|z-1|<1\end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned}
\frac{1}{z(1-z)} &= -\frac{1}{z-1}\cdot\frac{1}{z}\\
&= -\frac{1}{z-1}\cdot\frac{1}{1+(z-1)}\\
&= -\frac{1}{z-1}\cdot\frac{\frac{1}{z-1}}{1+\frac{1}{z-1}}\\
&= -\frac{1}{(z-1)^2}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{1}{z-1}\right)^k \quad \textit{para } \left|\frac{1}{z-1}\right|<1\\
&= \sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{(z-1)^k} \quad \textit{para } |z-1|>1
\end{aligned}$$

Portanto o desnenvolvimento de Laurent para $|z-1|>1$ é

$$\frac{1}{z(1-z)} = \sum_{n=-\infty}^{-2}(-1)^{n-1}(z-1)^n$$

□

(6) Seja f a função definida por

$$f(z) = \frac{1}{2+z} + \frac{\sin z}{z^2} - \frac{1}{z}\ .$$

(a) Determine e classifique as singularidades de f.
(b) Determine o desenvolvimento de f em série de Laurent válido para $0<|z|<2$.
(c) Calcule o integral de f ao longo da circunferência de raio 1 centrada na origem e percorrida uma vez no sentido positivo.
(d) Determine o raio de convergência do desenvolvimento de f em série de potências de $z+3$, *sem* calcular os coeficientes desse desenvolvimento. Justifique!

Resolução:

(a) *A função f(z) tem singularidades nos pontos $z=0$ e $z=-2$. No ponto 0 temos*

$$\begin{aligned}
\lim_{z\to 0}\left(\frac{1}{2+z}+\frac{\sin z}{z^2}-\frac{1}{z}\right) &= \frac{1}{2}+\lim_{z\to 0}\frac{\sin z - z}{z^2}\\
&= \frac{1}{2}+\lim_{z\to 0}\frac{\cos z-1}{2z}\\
&= \frac{1}{2}+\lim_{z\to 0}\frac{-\sin z}{2}\\
&= \frac{1}{2}+0
\end{aligned}$$

onde na segunda e terceira igualdades se aplicou a regra de l'Hospital [1] para resolver a indeterminação do limite. Uma vez que $f(z)$ tem limite quando $z\to 0$ conclui-se que o ponto $z=0$ é uma singularidade removível.
Quanto ao ponto $z=-2$, temos

$$\lim_{z\to -2} f(z) = \infty$$

[1] Também conhecida por regra de Cauchy

logo o ponto não é uma singularidade removível.

$$\lim_{z\to -2}(z+2)\left(\frac{1}{z+2}+\frac{\sin z}{z^2}-\frac{1}{z}\right)=1+0-0=1$$

logo o ponto $z=-2$ é um pólo simples.

(b) *Temos*

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2+z}+\frac{\sin z}{z^2}-\frac{1}{z} &= \frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{z}{2}}+\frac{1}{z^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}-\frac{1}{z} \text{ para } z\in\mathbb{C}\setminus\{0,-2\}\\
&= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{z}{2}\right)^n+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^{2k-1}}{(2k+1)!} \text{ para } 0<\left|\frac{z}{2}\right|<1\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^n}{2^{n+1}}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^{2k-1}}{(2k+1)!} \text{ para } 0<|z|<2\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n \text{ para } 0<|z|<2
\end{aligned}$$

onde

$$a_n=\begin{cases}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}} & \text{se } n \text{ é par}\\[2ex] \frac{(-1)^n}{2^{n+1}}+\frac{1}{(n+2)!} & \text{se } n \text{ é ímpar}\end{cases}$$

(c) *Seja γ a circunferência de raio 1 percorrida uma vez no sentido positivo. A única singularidade de $f(z)$ no interior de γ é o ponto $z=0$. Uma vez que esta é uma singularidade removível podemos prolongar $f(z)$ por continuidade ao ponto 0 obtendo uma função analítica no interior do contorno γ. Então pelo teorema de Cauchy, concluímos que*

$$\oint_\gamma f(z)dz=0$$

(d) *Seja R o raio de convergência do desenvolvimento em série de Taylor de $f(z)$ no ponto $z=-3$. Pelo teorema sobre o desenvolvimento de funções analıticas em série de Taylor sabemos que R é maior ou igual ao raio do maior disco centrado em $z=-3$ no qual f é analítica. Isto é, R é maior ou igual à distância de $z=-3$ à singularidade mais próxima, que é $z=-2$. Daqui concluímos que $R\geq 1$.*
Por outro lado, a série de Taylor converge para uma função analítica no interior do seu disco de convergência, que coincide com $f(z)$ para $|z|<1$. Ora vimos na alínea a) que $f(z)\to\infty$ quando $z\to -2$. Portanto $z=-2$ não pode pertencer ao disco de convergência da série. Concluímos que $R\leq 1$.

Conclusão: o raio de convergência do desenvolvimento de $f(z)$ em série de potências de $(z+3)$ é $R=1$.

□

Comentário: *Para classificar a singularidade $z=0$ na alínea a) poder-se-ia ter utilizado o desenvolvimento de Laurent da função $\frac{\sin z}{z^2}-\frac{1}{z}$ no ponto $z=0$*

$$\begin{aligned}
\frac{\sin z}{z^2}-\frac{1}{z} &= \frac{1}{z^2}\left(z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\dots\right)-\frac{1}{z}\\
&= -\frac{z}{3!}+\frac{z^3}{5!}-\dots
\end{aligned}$$

Uma vez que o desenvolvimento de Laurent no ponto $z = 0$ não tem termos com potências negativas concluímos novamente que a singularidade é removível. $\diamondsuit$